

平成 25 年度 九州大学大学院 工学府

地球環境工学専攻群（建設都市系）

修士課程入学試験 問題冊子

数学

注意事項

1. 「始め」の合図があるまでは、試験問題冊子の中身を見てはいけません。
2. 試験問題は【問題 1】から【問題 5】の計 5 問です。試験問題冊子は、7 ページ目まであります。
3. すべての問題を解答してください。
4. 机の上に置ける物は、時計（携帯電話は不可）、シャープペンシル（鉛筆でも可）、消しゴム、受験票だけです。これら以外のものを机の上に置きたい場合は試験監督者の許可を得てください。許可無く机の上に置いた場合は、不正行為と見なし、退出を命じます。
5. 携帯電話は必ず電源を切って、鞆の中などにしまってください。
6. 試験問題冊子のホッチキスをはずしてはいけません。
7. 「始め」の合図があったら、ただちにページの不足および印刷の不鮮明なところが無いことを確かめてください。もしあったら取り替えますから、手を挙げて申し出てください。
8. 試験時間中に問題冊子表紙上方の指定の欄に受験番号と氏名を記入してください。
9. 「解答止め」の合図があったら、ただちに解答の作成を止め、試験問題冊子および解答冊子を回収するまでそのまま待っていてください。

【問題 1】 曲面  $z = f(x, y) = 3\sqrt{1 - \frac{1}{4}x^2 - y^2}$ ,  $\left(1 - \frac{1}{4}x^2 - y^2 \geq 0\right)$  について, 以下の問いに答えよ。

(20 点)

(1) 点  $(x_0, y_0, z_0)$  での接平面を求めよ。ただし  $z_0 = f(x_0, y_0)$  とする。

(2) 小問(1)で求めた接平面と  $z = 0$  ( $xy$  平面) との交線を求めよ。

(3) 曲面と  $z = 0$  ( $xy$  平面) に囲まれる領域の体積を求めよ。

【問題 2】 以下の問いに答えよ。(20 点)

ロケットが一定の割合  $-dm/dt = \alpha$ , ( $\alpha > 0$ ) で燃料を消費し, ロケットに相対的に一定の速さ  $u_0$  の高速ガスを噴射して鉛直方向に上昇している。ロケット本体の質量を  $M$ , 燃料の質量を  $m$  とし,  $t = 0$  で  $h = 0$ ,  $v = 0$ ,  $m = m_0$  であったとする。燃料を全部消費し終わった時のロケットの速度  $v$  と高度  $h$  を求めよ。ただし, 重力の高度による変化は無視する。

なお, ロケットの速度を求める方程式は, 式(1)の通り表される。

$$(M + m) \frac{dv}{dt} - \alpha u_0 = -(M + m)g \quad (1)$$

余白（計算に使用しても良い）

【問題 3】 説明文をよく読んだ後、以下の問いに答えよ。なお、行列  $\mathbf{P}$  の逆行列を  $\mathbf{P}^{-1}$ 、転置行列を  $\mathbf{P}^t$  と表す。(30 点)

(説明 1) 正方行列  $\mathbf{A}$  に対して、ある正則な行列  $\mathbf{P}$  を用いて、 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$  が対角行列になるようにすることを対角化という。正方行列  $\mathbf{A}$  が  $n$  次の行列で、 $n$  個の 1 次独立な固有ベクトルを持つならば対角化が可能であり、ある正則な行列  $\mathbf{P}$  は正方行列  $\mathbf{A}$  の固有ベクトルを列成分に持つ行列である。

(説明 2) 正方行列  $\mathbf{A}$  が対称行列ならば対角化が可能であり、その固有ベクトルを正規化して列成分に持つ行列  $\mathbf{P}$  をとれば、行列  $\mathbf{P}$  は直交行列 ( $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^t$ ) であり、 $\mathbf{D} = \mathbf{P}^t\mathbf{A}\mathbf{P}$  が対角行列になる。

(1) 行列  $\mathbf{A}$  が  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$  で表される時、行列  $\mathbf{A}$  の固有値と正規化した固有ベクトルを求めよ。

(2) 小問(1)で求めた 2 つの正規化した固有ベクトルは互いに直交することを示せ。

(3)  $xy$  平面上で中心を原点に持つ楕円  $5x^2 - 4xy + 2y^2 = (x \ y) \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$  が存在している。(説明 2) に従い、行列  $\mathbf{A}$  を対角化するための行列を行列  $\mathbf{P}$  とし、 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$  と置けば、楕円を表す方程式  $5x^2 - 4xy + 2y^2 = 1$  を  $\alpha X^2 + \beta Y^2 = 1$  と表すことができる。このときの  $\alpha$  と  $\beta$  を求めよ。

(4) 2 次曲線  $ax^2 + by^2 = 1$  が  $xy$  平面上で中心を原点に持つ楕円(円も含む)であるための条件は、 $a, b$  がともに正の実数である。2 次曲線  $px^2 + 2qxy + ry^2 = 1$  ( $p, q, r$  は実数) が  $xy$  平面上で中心を原点に持つ楕円であるための必要十分条件を小問(3)の結果をふまえて求めよ。

余白（計算に使用しても良い）

【問題 4】ある工場では、A, B, C の 3 つの製造ラインで同一製品を製造しており、その割合は 50%、30%、20%である。また、各製造ラインの不良品率はそれぞれ 1%、2%、2%である。ある製品が不良品であったとき、この製品が製造ライン B で生産された確率を求めよ。

(15 点)

【問題 5】確率密度  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin x & (0 \leq x \leq \pi) \\ 0 & (x < 0, \pi < x) \end{cases}$  で与えられた確率分布について、期待値と分散を求めよ。(15 点)

余白（計算に使用しても良い）